

华东交通大学考试专用答题纸 (适用于非匿名改卷)

姓名: _____ 学号: _____ 课程: _____

教学班级: _____ 教学小班序号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	4-1 P58 廖国勇 答题内容 2016.10.14
1	函数 $f(x) = x^3 - 9x + 2$ 在区间 $[0, 3]$ 上满足罗尔定理 $\xi =$ _____ 解: $f'(x) = 3x^2 - 9$ 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$ (舍去) $\therefore \xi = \sqrt{3}$
2	函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日定理的 $\xi =$ _____ 解: $f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) = f'(\xi)$ $\Rightarrow 1 - \ln 2 - [0 - \ln(1+0)] = 1 - \frac{1}{1+\xi} \Rightarrow \xi = \frac{1}{\ln 2} - 1$
3	设 $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在区间 $(0, 7)$ 的根的个数为 _____ 解: $\because f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = 0$, 由罗尔定理, $\exists \xi_1 \in (1, 3), \xi_2 \in (3, 5), \xi_3 \in (5, 7)$ 使得 $f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0, f'(\xi_3) = 0$, 由于 $f'(x)$ 为三次多项式, 至多 3 个实根, 故答案为 3.
4	函数 $f(x) = \tan x$ 的 3 阶麦克劳林展开式 解: $f'(x) = \sec^2 x, f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x = 2\sec^2 x \tan x, f'''(x) =$

号 138

$$4 \quad f'''(x) = 4 \sec x \cdot \sec x \tan x \cdot \tan x + 2 \sec^4 x$$

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

利用麦克劳林展开式求下列极限

$$1 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x - e^{x^2})}$$

$$\text{解: } \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x - e^{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - [1 + x^2 + o(x^2)] = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - [1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)]}{x^2[-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}$$

$$2 \quad \text{求极限} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4-2x^3}) = x[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} + o(\frac{1}{x})]$$

$$\text{解: } \sqrt[3]{x^3+3x^2} = x(1 + \frac{3}{x})^{\frac{1}{3}} = x[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3}-1)(\frac{3}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2})]$$

$$\sqrt[4]{x^4-2x^3} = x(1 + \frac{-2}{x})^{\frac{1}{4}} = x[1 + \frac{1}{4}(-\frac{2}{x}) + o(\frac{1}{x})]$$

$$\text{于是, 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} + o(\frac{1}{x})] - x[1 + \frac{1}{4}(-\frac{2}{x}) + o(\frac{1}{x})] \\ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $3f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

证明: 设 $F(x) = x^3 f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 可导.

$F(0) = 0^3 f(0) = 0 = F(1) = 1^3 f(1)$, 由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (0,1)$

使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $3\xi^2 f(\xi) + \xi^3 f'(\xi) = 0 \Rightarrow 3f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

三 2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=f'(\xi)$.

证明: 设 $F(x) = e^x f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导
 $F(0) = e^0 f(0) = 0$ $F(1) = e^1 f(1) = 0 = F(0)$, 由罗尔定理, $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $-e^{-\xi} f(\xi) + e^{-\xi} f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = f'(\xi)$

3 证明方程 $x^5 + x + 1 = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且仅有一个实根

证明: 先证有一个实根。设 $f(x) = x^5 + x + 1$, 显然 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续, $f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0$, 由零点定理知, $\exists \xi \in (-1,0)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $x^5 + x + 1 = 0$ 在 $(-1,0)$ 内有一个实根。下面用反证法证明不可能有第二个实根落在 $(-1,0)$ 。假设 $\eta \in (-1,0)$ 且 $f(\eta) = 0$, $\eta \neq \xi$, 则由罗尔定理, $\exists c \in (\min(\xi, \eta), \max(\xi, \eta))$ 使得 $f'(c) = 0 \Rightarrow 5c^4 + 1 = 0$, 这不可能, 假设不正确。综上所述, $x^5 + x + 1 = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且仅有一个实根。

p60 4 设 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上具有二阶导数且 $f(2) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (1,2)$, 使 $F''(\xi) = 0$

证明: $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上可导, 当然也是连续的, $F(1) = F(2) = 0$
 由罗尔定理知, $\exists \eta \in (1,2)$, 使得 $F'(\eta) = 0$, 又 $F'(1) = 0$
 对于函数 $f'(x)$, 其在 $[1,\eta]$ 上连续, 在 $(1,\eta)$ 内可导, 再由罗尔定理知, $\exists \xi \in (1,\eta) \subset (1,2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$ 。

题号

4.1 P60 理学院 廖国勇 答题内容

2016.10.14

P60 5 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $2015f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

证明: 设 $F(x) = e^{2015x} f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理, $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $2015e^{2015\xi} f(\xi) + e^{2015\xi} f'(\xi) = 0$
所以 $2015f(\xi) + f'(\xi) = 0$

6 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$

证明: 设 $F(x) = xf(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日定理, $\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\xi)$, 即 $\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$

7 设 $b > a > 0$, 证明: $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

证明: 由拉格朗日定理 $\arctan b - \arctan a = (\arctan x)'|_{x=\xi} \cdot (b-a) = \frac{1}{1+\xi^2} (b-a)$ $\xi \in (a, b)$

由 $\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+\xi^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$ 得 $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

8 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

证明: 设 $F(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ ($x \geq 1$)

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1+x^2}{1-x^2} \times 2x \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

所以 $F(x)$ 为常数函数, $F(x) = F(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \arccos \frac{2 \cdot 1}{1+1^2} = \frac{\pi}{4}$

题号	4-1 P61	廖国勇	答 题 内 容	2016.10.14
9	设 $b > a > 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{be^a - ae^b}{b-a} = e^\xi - \xi e^\xi$ 证明: 设 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 显然 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ ($x \in (a, b)$), 由柯西定理 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立, $(\exists \xi \in (a, b))$ 化简得 $\frac{be^a - ae^b}{b-a} = e^\xi - \xi e^\xi$			
P62 10	设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明: 至少存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$ 证明: 由柯西定理知, $\exists \eta \in (a, b)$ 使得 $\frac{e^b - e^a}{f(b) - f(a)} = \frac{e^\eta}{f'(\eta)}$ $\Rightarrow f(b) - f(a) = (e^b - e^a) \cdot e^{-\eta} \cdot f'(\eta)$ (1) 由拉格朗日定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ (2) (1)(2) 联立得 $f'(\xi)(b-a) = (e^b - e^a) e^{-\eta} f'(\eta)$, 即 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$			
11	设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 证明: 先证 $\exists \eta \in [0, 2]$, 使得 $f(\eta) = 1$。设 $m = \min[f(0), f(1), f(2)]$, $M = \max[f(0), f(1), f(2)]$, 由 $f(0) + f(1) + f(2) = 3 \Rightarrow m \leq 1, M \geq 1$ 由连续函数介值定理, $\exists \eta \in [0, 2]$, 使得 $f(\eta) = 1$ 再由罗尔定理, $F(x)$ 在 $[\eta, 3]$ 上连续, $F(x)$ 在 $(\eta, 3)$ 上可导, $F(\eta) = F(3) = 1$, $\exists \xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$			

三 12 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$.

证明 (1) 设 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,
 $\lambda F(0) = f(0) - 1 + 0 = -1, F(1) = f(1) - 1 + 1 = 0, F(0)F(1) < 0$
 由零点定理知, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 1-\xi$

(2) $f(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上连续, 在 $(0, \xi)$ 上可导, 由拉格朗日定理
 $\exists \eta_1 \in (0, \xi)$, 使得 $f(\xi) - f(0) = f'(\eta_1)(\xi - 0)$, 化简得
 $1-\xi = f'(\eta_1) \cdot \xi$ ①

同理, $f(x)$ 在 $[\xi, 1]$ 上连续, 在 $(\xi, 1)$ 内可导, 由拉格朗日定理
 $\exists \eta_2 \in (\xi, 1)$, 使得 $f(1) - f(\xi) = f'(\eta_2)(1-\xi)$, 化简得
 $\xi = f'(\eta_2)(1-\xi)$ ②

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 联立 } \begin{cases} 1-\xi = f'(\eta_1) \cdot \xi \\ \xi = f'(\eta_2) \cdot (1-\xi) \end{cases}$$

两式相乘化简得

$$f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$$